Fiche n°5 : Espace projectif

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel (de dimension finie).

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'on peut identifier $\mathbb{P}(F)$ avec $\{l \in \mathbb{P}(E) \mid l \subset F\}$.
2. Soient F_i des sous-espaces vectioriels de E. Montrer que $\cap_i \mathbb{P}(F_i) = \mathbb{P}(\cap F_i)$.

Exercice 2. Soient V et W deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$. Montrer que si $\dim V + \dim W \geq \dim \mathbb{P}(E)$ alors $V \cap W \neq \emptyset$.

Exercice 3. Soit H un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(E)$ et soit m un point hors de H. Montrer que toute droite passant par m coupe H en un et un seul point.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\Delta = \{(x, y, z) \mid y = 2x + z\}$ et $\Delta' = \{(x, y, z) \mid y = 2x + 3z\}$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on notera $[x : y : z]$ sa classe d'équivalence dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

1. Montrer qu'on peut identifier $\mathbb{R}^2$ à $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \mid z \neq 0\}$ via l'application $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$.
2. Via l'identification précédente, soit D la trace sur $\mathbb{R}^2$ laissée par $\mathbb{P}(\Delta)$. Idem avec D' pour Δ'. Que peut-on dire sur D et D' ? (intersection ? parallélisme ?)
3. Justifier que $\mathbb{P}(\Delta) \cap \mathbb{P}(\Delta')$ est non vide et le déterminer.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer que $\mathbb{P}(E)$ est un espace topologique compact et connexe par arcs.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel et H un hyperplan de E. On désigne par E_H l'ensemble des droites vectorielles de E qui ne sont pas contenues dans H.

1. Quel est le complémentaire de E_H dans $\mathbb{P}(E)$?
2. Soit $\ell \in E_H$ une droite vectorielle fixée. Montrer qu'il existe une bijection $E_H \longrightarrow L(\ell, H)$ de E_H sur l'espace des applications linéaires de ℓ dans H.

Exercice 7 (Notion de perspectives)**.** Soient H et H' deux hyperplans d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$, m un point situé ni sur H sur ni sur H'. Soit x un point de H. Montrer que la droite mx rencontre H' en un point unique, noté $g(x)$. Montrer que $g : H \longrightarrow H'$ est une homographie. g s'appelle **la perspective** de centre m de H sur H'.

Exercice 8. 1. Rappeler la définition d'un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$.

2. Soient $(m_0, m_1, \dots, m_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$. Montrer que si deux bases $(e_1, \dots, e_{n+1})$ et $(e'_1, \dots, e'_{n+1})$ de E sont telles que $p(e_i) = p(e'_i) = m_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$ et $p(e_1+e_2+\cdots+e_{n+1}) = p(e'_1 + e'_2 + \cdots + e'_{n+1}) = m_0$, alors elles sont proportionnelles.

Exercice 9. 1. Montrer que les homographies de $\mathbb{P}(E)$ forment un groupe noté $(GP(E), \circ)$.

2. Soit ψ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \psi : GL(E) &\longrightarrow GP(E) \\ f &\longmapsto \psi(f) = \hat{f} \end{aligned}$$

Montrer que ψ est un morphisme de groupes et déterminer $\ker \psi$.

3. Soit g une élément de $GP(E)$. Montrer que si la dimension de $\mathbb{P}(E)$ est paire, g admet toujours un point fixe. Trouver une homograpphie sans point fixe.

Exercice 10. Soit $g : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E)$ une homographie. On suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et que la dimension de $\mathbb{P}(E)$ est paire. Montrer que g a toujours un point fixe. Trouver une homographie $g : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ sans point fixe.

Exercice 11. 1. Montrer que deux endomorphismes (d'un plan vectoriel) digonalisables dans la même base commutent. Que dire de la réciproque ?

2. Soient f et g deux homographies d'une droite ayant chacune deux points fixes distincts. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont les même points fixes.

Exercice 12. 1. Quelles sont les homographies de $P_1(\mathbb{K})$ qui préservent ∞ ?

2. Quelles sont les homographies de $P_1(\mathbb{K})$ qui préservent ∞ et 0 ?

3. Montrer que les homographies de $P_1(\mathbb{K})$ qui préservent deux points distincts a et b est un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{K})$ isomorphe à $\mathbb{K}^*$.

Exercice 13. (**le birapport**) Soit D une droite projective.On suppose que les points a, b et c forment un repère projectif de D. Rappelons qu'il existe une homographie unique φ de D sur $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\varphi(a) = \infty \quad , \quad \varphi(b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(c) = 1.$$

Si d est un autre point de D, $\varphi(d)$ s'appelle le *birapport* de (a, b, c, d) et se note $[a, b, c, d]$.
Soient a, b c et d quatre points d'une droite projective D (les trois premiers sont distincts) et a', b' c' et d' quatre points d'une droite d'une droite projective D' (vérifiant la même hypothèse). Montrer qu'il existe une homographie $f : D \longrightarrow D'$ telle que $f(a_i) = a'_i$ si et seulement si $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Exercice 14. (**involutions et birapport**) Une involution est une homographie g qui n'est pas l'identité et qui vérifie $g \circ g = id$

1. Montrer qu'une homographie g d'une droite projective est une involution si et seulement si il existe deux points p et p' (distincts) de cette droite et tels que $g(p) = p'$ et $g(p') = p$.

   On donne deux séries de trois points distincts a_i et a'_i $(1 \leq i \leq 3)$ d'une droite projective. Soit f l'unique homographie qui envoit a_i sur a'_i. Montrer que que f est une involution si et seulement si

$$\forall j \in \{1, 2, 3\},\ [a_1, a_2, a_3, a'_j] = [a'_1, a'_2, a'_3, a_j].$$

2. Soit g une homographie involutive d'une droite projective réelle dans elle-même . Montrer que si g a un point fixe, alors elle en a exactement deux. Montrer que, pour tout m de la droite, on a $[a, b, m, g(m)] = -1$.

Exercice 15. On considère un plan projectif $\mathbb{P}(E)$ où on dispose d'une règle pour tracer la droite passant par deux points distincts donnés. Soient A, B, C, D un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une unique homographie $\varphi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E)$ telle que

$$\varphi(A) = A \quad , \quad \varphi(B) = B \quad , \quad \varphi(C) = D \quad \text{et} \quad \varphi(D) = C.$$

2. Construire à la règle un point E de la droite (AB) distinct de A et B tel que $\varphi(E) = E$.
3. En déduire que la droite (AB) est invariante par φ.

   Soit Δ la droite joignant les points $(AD) \cap (BC)$ et$(AC) \cap (BD)$ et π_A (resp.π_B) la perspective de centre A (resp. B) de la droite (CD) vers la droite Δ.
4. Montrer que $I = (CD) \cap \Delta$ est fixé par φ.
5. Soit $\varphi\mid_{(CD)}$ la restriction de φ à la droite (CD). Montrer que $\pi_B^{-1} \circ \pi_A = \varphi\mid_{(CD)}$.
6. Soit P un point de $\mathbb{P}(E)$ hors de la droite (AB). Construire à la règle le point $\varphi(P)$. On traitera d'abord le cas où $P \in (CD)$ puis le cas général.

   On identifie $\mathbb{P}(E)$ à $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$, muni du repère projectif A, B, C et D.
7. Écrire une matrice de $f \in GL(\mathbb{K}^3)$ telle que $\varphi = p(f)$.
8. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Fix}(\varphi)$ des points de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ fixés par φ.

   Soient P un point de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ hors de $\mathrm{Fix}(\varphi) \cup (AB) \cup (CD)$, $P' = \varphi(P)$ son image par φ et δ la droite (PP').
9. Déterminer le point $\delta \cap (CD)$.
10. Calculer la birapport des point P,P', $\delta \cap (CD)$, $\delta \cap (AB)$ de la droite δ.